

Dalla Matematica alla Fisica ... e viceversa: quantizzare un mondo classico

N. Drago & L. Pettinari

@ Beer&Physics — 📍 Trento

20.11.2024



**Università
di Genova**

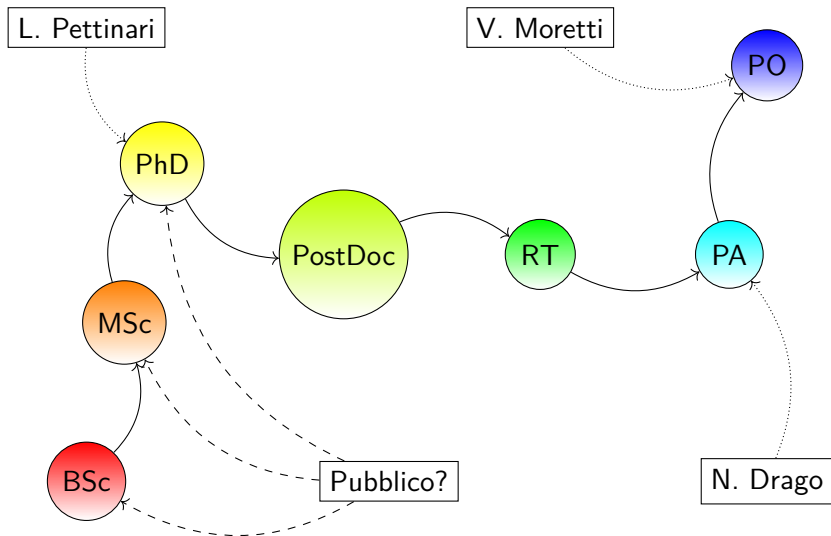


Da qui ai prossimi ~ 20 minuti

- * La carriera universitaria: da matricola a PO
- * Cos'è la Fisica Matematica?
- * Matematica vs. Fisica:
il caso del potenziale Newtoniano in MQ



La carriera universitaria



Che cos'è la Fisica Matematica? ¹

F.M.F. “Un lontano e vago ricordo.”

L.S. “Quella cosa che non piace né ai matematici, né ai fisici.”

C.F.vdV. “Un campo che i chimici non studiano e non capiscono.”

P.R. “E' conoscere la Matematica globalmente come un'aquila conosce la foresta. Pur senza conoscere bene il singolo stagno come una rana.”

A.M. “Probabilmente la più omnicomprensiva delle branche matematiche e ciò che un fisico teorico dovrebbe perseguire se intende dir il vero.”

N.D. “E' un'applicazione della Matematica che spiega cose che chi studia Fisica ha già capito da un pezzo.”

¹Tutti gli intervistati hanno una Laurea ed una vita tutto sommato normale.

Matematica vs. Fisica

- * Approccio matematico e fisico vengono talvolta **contrapposti**
- * Approccio fisico:
 - ↑ più concreto, legato agli esperimenti;
 - ↓ argomenti ad hoc;
- * Approccio matematico:
 - ↑ più formale, cattura l'essenza dei modelli;
 - ↓ più astratto;



Matematica vs. Fisica

- * Approccio matematico e fisico vengono talvolta **contrapposti**
- * Approccio fisico:
 - ↑ più concreto, legato agli esperimenti;
 - ↓ argomenti ad hoc; **"Non si capisce niente"**
- * Approccio matematico:
 - ↑ più formale, cattura l'essenza dei modelli;
 - ↓ più astratto; **"Non si capisce niente"**



Matematica vs. Fisica

- * Approccio matematico e fisico vengono talvolta **contrapposti**
- * Approccio fisico:
 - ↑ più concreto, legato agli esperimenti;
 - ↓ argomenti ad hoc; **"Non si capisce niente"**
- * Approccio matematico:
 - ↑ più formale, cattura l'essenza dei modelli;
 - ↓ più astratto; **"Non si capisce niente"**
- * Più che contrapposti, i due approcci sono **complementari**



Il potenziale Newtoniano in Meccanica Quantistica

Quantità fisica $\rightsquigarrow$ Energia

Oggetto matematico $\rightsquigarrow$ $H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|}$

Proprietà $\rightsquigarrow$ simmetrica

Obiettivo $\rightsquigarrow$ $\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia

Approccio $\rightsquigarrow$ cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$

Teorema (Potenziale Newtoniano in 3D)

$$\sigma(H_3) = \left\{ -\frac{\kappa^2 m}{2\hbar n^2} \mid n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Il potenziale Newtoniano in 1D,2D

$$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|} \quad d \in \{1, 2\}$$

Il potenziale Newtoniano in 1D,2D

$$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|} \quad d \in \{1, 2\}$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno 1D ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

Il potenziale Newtoniano in 1D,2D

$$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|} \quad d \in \{1, 2\}$$

1959 Loundon: l'atomo di idrogeno 1D ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;

1966 Andrews: perplessità per l'infinita energia di legame;

Il potenziale Newtoniano in 1D,2D

$$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|} \quad d \in \{1, 2\}$$

- 1959 Loundon: l'atomo di idrogeno 1D ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;
- 1966 Andrews: perplessità per l'infinita energia di legame;
- 1969 Haines & Roberts: nuovi autovettori, uno spettro continuo;

Il potenziale Newtoniano in 1D,2D

$$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|} \quad d \in \{1, 2\}$$

- 1959 Loundon: l'atomo di idrogeno 1D ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;
- 1966 Andrews: perplessità per l'infinita energia di legame;
- 1969 Haines & Roberts: nuovi autovettori, uno spettro continuo;
- 1976 Andrews: critica allo spettro continuo;

Il potenziale Newtoniano in 1D,2D

$$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|} \quad d \in \{1, 2\}$$

- 1959 Loundon: l'atomo di idrogeno 1D ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;
- 1966 Andrews: perplessità per l'infinita energia di legame;
- 1969 Haines & Roberts: nuovi autovettori, uno spettro continuo;
- 1976 Andrews: critica allo spettro continuo;
- 1985 Spector & Lee: argomento relativistico che escludeva il prolema del *ground* con infinita energia di legame;

Il potenziale Newtoniano in 1D,2D

$$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{|x|} \quad d \in \{1, 2\}$$

- 1959 Loundon: l'atomo di idrogeno 1D ha 2 autovettori per ogni autovalore, tranne il *ground* che ha infinita energia di legame;
- 1966 Andrews: perplessità per l'infinita energia di legame;
- 1969 Haines & Roberts: nuovi autovettori, uno spettro continuo;
- 1976 Andrews: critica allo spettro continuo;
- 1985 Spector & Lee: argomento relativistico che escludeva il prolema del *ground* con infinita energia di legame;
- ⋮
- 2009 de Oliveira & Verri: l'origine delle controversie sta nella scarsa attenzione per i dettagli matematici.

L'approccio matematico

Quantità fisica	$\rightsquigarrow$	Energia
Oggetto matematico	$\rightsquigarrow$	$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$
Proprietà	$\rightsquigarrow$	simmetrica
Obiettivo	$\rightsquigarrow$	$\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia
Approccio	$\rightsquigarrow$	cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$

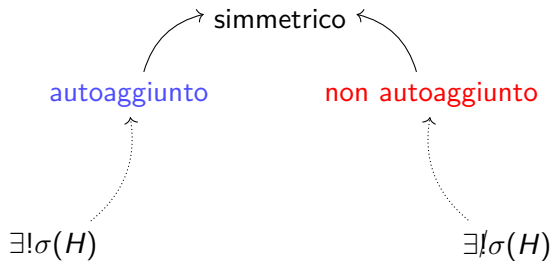
L'approccio matematico

Quantità fisica	$\rightsquigarrow$	Energia
Oggetto matematico	$\rightsquigarrow$	$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$
Proprietà	$\rightsquigarrow$	simmetrica
Obiettivo	$\rightsquigarrow$	$\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia
Approccio	$\rightsquigarrow$	cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$



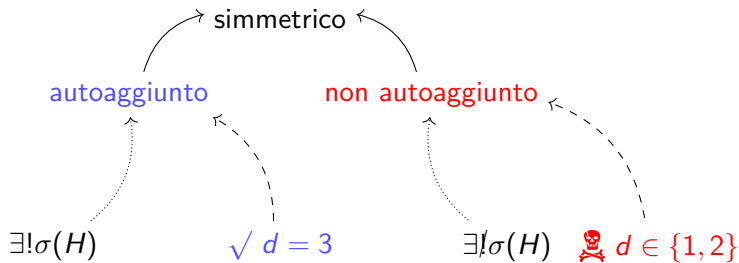
L'approccio matematico

Quantità fisica	$\rightsquigarrow$	Energia
Oggetto matematico	$\rightsquigarrow$	$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$
Proprietà	$\rightsquigarrow$	simmetrica
Obiettivo	$\rightsquigarrow$	$\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia
Approccio	$\rightsquigarrow$	cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$



L'approccio matematico

Quantità fisica	$\rightsquigarrow$	Energia
Oggetto matematico	$\rightsquigarrow$	$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$
Proprietà	$\rightsquigarrow$	simmetrica
Obiettivo	$\rightsquigarrow$	$\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia
Approccio	$\rightsquigarrow$	cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$



L'approccio fisico

Quantità fisica	$\rightsquigarrow$	Energia
Oggetto matematico	$\rightsquigarrow$	$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$
Proprietà	$\rightsquigarrow$	simmetrica
Obiettivo	$\rightsquigarrow$	$\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia
Approccio	$\rightsquigarrow$	cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$

Se $d \in \{1, 2\}$, H_d **non** è la “giusta” energia

L'approccio fisico

Quantità fisica	$\rightsquigarrow$	Energia
Oggetto matematico	$\rightsquigarrow$	$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$
Proprietà	$\rightsquigarrow$	simmetrica
Obiettivo	$\rightsquigarrow$	$\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia
Approccio	$\rightsquigarrow$	cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$

Se $d \in \{1, 2\}$, H_d **non** è la “giusta” energia

d	3	2	1
H_d	$\frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$	$\frac{p^2}{2m} + \kappa \ln x $	$\frac{p^2}{2m} + \kappa x $

L'approccio fisico

Quantità fisica	$\rightsquigarrow$	Energia
Oggetto matematico	$\rightsquigarrow$	$H_d = \frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$
Proprietà	$\rightsquigarrow$	simmetrica
Obiettivo	$\rightsquigarrow$	$\sigma(H_d)$ = possibili valori dell'energia
Approccio	$\rightsquigarrow$	cercare gli autovettori: $H_d\psi = \lambda\psi$

Se $d \in \{1, 2\}$, H_d **non** è la “giusta” energia

d	3	2	1
H_d	$\frac{p^2}{2m} - \frac{\kappa}{ x }$	$\frac{p^2}{2m} + \kappa \ln x $	$\frac{p^2}{2m} + \kappa x $

Teorema (Potenziale Newtoniano in 1D,2D)

$H_2 = \frac{p^2}{2m^2} + \kappa \ln |x|$ e $H_1 = \frac{p^2}{2m^2} + \kappa|x|$ sono autoaggiunte.

Conclusioni

Conclusioni

- * Un **malriposto** intuito fisico porta a misteriose controversie;

Conclusioni

- * Un **malriposto** intuito fisico porta a misteriose controversie;
- * I problemi in Matematica **riflettono** aspetti della Fisica;

Conclusioni

- * Un **malriposto** intuito fisico porta a misteriose controversie;
- * I problemi in Matematica **riflettono** aspetti della Fisica;
- * Un **buon** intuito fisico evita svangate di conti inutili;

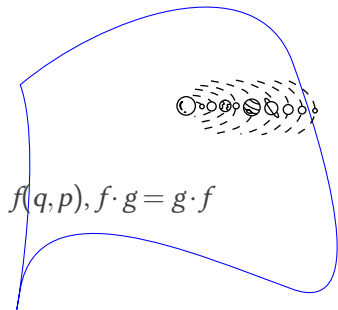
Conclusioni

- * Un **malriposto** intuito fisico porta a misteriose controversie;
- * I problemi in Matematica **riflettono** aspetti della Fisica;
- * Un **buon** intuito fisico evita svangate di conti inutili;
- * La Matematica è come una supposta.
Non piace, ma a volte aiuta.

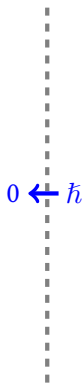


Ma cosa significa quantizzare?

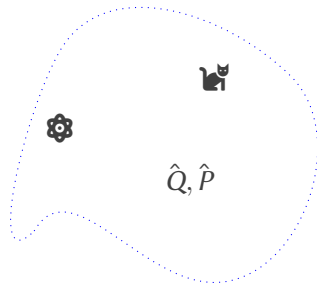
Teoria classica



Confine?



Teoria quantistica



Approccio old school: Dirac

💡 It all started with:

$$1 = \{q, p\} \longrightarrow -i [\hat{Q}, \hat{P}] = I, \quad (\text{Dirac})$$

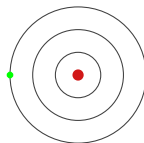
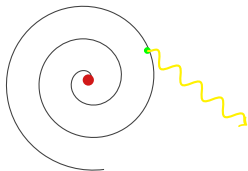
Approccio old school: Dirac

💡 It all started with:

$$1 = \{q, p\} \longrightarrow -i [\hat{Q}, \hat{P}] = I, \quad (\text{Dirac})$$

👍 Analogia vincente :

$$E_{\text{idrogeno}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{|q|} \longrightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - e|\hat{Q}|^{-1}$$



La citata supposta

Lista della spesa per una buona quantizzazione



$$f(q) \longrightarrow f(\hat{Q}), \quad g(p) \longrightarrow g(\hat{P})$$

La citata supposta

Lista della spesa per una buona quantizzazione



$$f(q) \longrightarrow f(\hat{Q}), \quad g(p) \longrightarrow g(\hat{P})$$



$$f \rightarrow \hat{f}, \quad g \rightarrow \hat{g} \implies f + g \longrightarrow \hat{f} + \hat{g}$$

La citata supposta

Lista della spesa per una buona quantizzazione



$$f(q) \longrightarrow f(\hat{Q}), \quad g(p) \longrightarrow g(\hat{P})$$



$$f \rightarrow \hat{f}, \quad g \rightarrow \hat{g} \implies f + g \longrightarrow \hat{f} + \hat{g}$$



$$\{f, g\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad \text{Dirac}$$



Altre...

La citata supposta

Lista della spesa per una buona quantizzazione



$$f(q) \longrightarrow f(\hat{Q}), \quad g(p) \longrightarrow g(\hat{P})$$



$$f \rightarrow \hat{f}, \quad g \rightarrow \hat{g} \implies f + g \longrightarrow \hat{f} + \hat{g}$$



$$\{f, g\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad \text{Dirac}$$



Altre...



Teorema (Groenwold) Non esiste una quantizzazione che le soddisfi tutte

La citata supposta

Lista della spesa per una buona quantizzazione



$$f(q) \longrightarrow f(\hat{Q}), \quad g(p) \longrightarrow g(\hat{P})$$



$$f \rightarrow \hat{f}, \quad g \rightarrow \hat{g} \implies f + g \longrightarrow \hat{f} + \hat{g}$$



$$\{f, g\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad \text{Dirac}$$



Altre...



Teorema (Groenwold) Non esiste una quantizzazione che le soddisfi tutte



$qp = pq \longrightarrow \hat{Q}\hat{P} \text{ o } \hat{P}\hat{Q}?$

La citata supposta

Lista della spesa per una buona quantizzazione



$$f(q) \longrightarrow f(\hat{Q}) \quad g(p) \longrightarrow g(\hat{P})$$



$$f \rightarrow \hat{f}, g \rightarrow \hat{g} :$$



$$\{f, g\} \longrightarrow$$



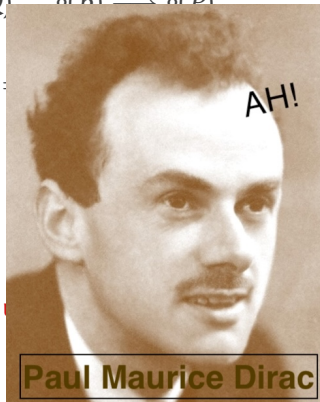
Altre...



Teorema (Groenwold) Non esiste una quantizzazione canonica che soddisfi tutte



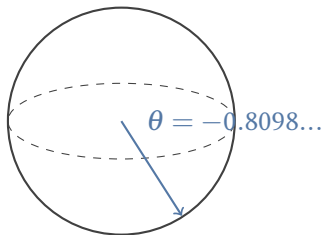
$$qp = pq \longrightarrow \hat{Q}\hat{P} \text{ o } \hat{P}\hat{Q} ?$$



Quantizzazione new age: mappe di quantizzazione

Classicamente misuriamo funzioni...

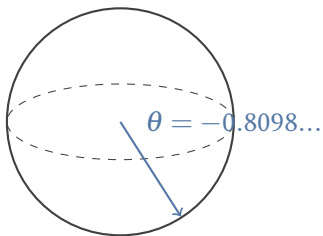
$$f(\theta, \varphi), f \in C(\mathbb{S}^2)$$



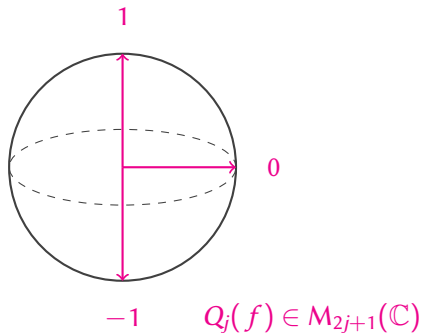
Quantizzazione new age: mappe di quantizzazione

Classicamente misuriamo funzioni...

$$f(\theta, \varphi), f \in C(\mathbb{S}^2)$$



... Quantisticamente operatori (matrici)



Quantizzazione new age: mappe di quantizzazione

⚙ $Q_j(f) := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{d\Omega}{4\pi} (2j+1) f M_j \in M_{2j+1}(\mathbb{C}),$ (j spin del sistema)

Quantizzazione new age: mappe di quantizzazione

⚙ $Q_j(f) := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{d\Omega}{4\pi} (2j+1) f M_j \in M_{2j+1}(\mathbb{C}),$ (j spin del sistema)

⚙ $\lim_{j \rightarrow \infty} \left(Q_j(\{f, g\}) - i(2j+1)[Q_j(g), Q_j(f)] \right) = 0$ (verificata per grandi energie!)

Quantizzazione new age: mappe di quantizzazione

- ⚙ $Q_j(f) := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{d\Omega}{4\pi} (2j+1) f M_j \in M_{2j+1}(\mathbb{C})$, (j spin del sistema)
- ⚙ $\lim_{j \rightarrow \infty} \left(Q_j(\{f, g\}) - i(2j+1)[Q_j(g), Q_j(f)] \right) = 0$ (verificata per grandi energie!)
- ⚙ Si possono fare conti più o meno espliciti e noiosi

$$Q_j(\cos \theta) = J_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & j-1/j & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix}, \quad Q_j(\sin \theta \cos \varphi) = J_x, \quad Q_j(\sin \theta \sin \varphi) = J_y$$

💀 (Anche cose più complicate)

$$Q_j(Y_{\ell,m}) \propto J_z^{m_3} J_x^{m_1} J_y^{m_2} + \dots$$

Quantizzazione new age: prodotto deformato

💡 Il prodotto di funzioni *commuta* $f \cdot g = g \cdot f$

Quantizzazione new age: prodotto deformato

- 💡 Il prodotto di funzioni **commuta** $f \cdot g = g \cdot f$
- 💡 Il prodotto di operatori **non commuta** $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar I$

Quantizzazione new age: prodotto deformato

- 💡 Il prodotto di funzioni **commuta** $f \cdot g = g \cdot f$
- 💡 Il prodotto di operatori **non commuta** $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar I$
- 💡 Inventiamo un prodotto che **non commuti** $f \times_{\hbar} g$



Quantizzazione new age: prodotto deformato

- 💡 Il prodotto di funzioni **commuta** $f \cdot g = g \cdot f$
- 💡 Il prodotto di operatori **non commuta** $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar I$
- 💡 Inventiamo un prodotto che **non commuti** $f \times_{\hbar} g$

Non così semplice...

$$f \times_{\hbar} g := \int \alpha_{Ju}(f) \alpha_v(g) e^{iu \cdot v} du dv$$

$$f \times_{\hbar} g = \sum_{|n|=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^z (-)^{|z|} \partial^z f \partial^z g$$

- ⚙ α azione di un gruppo sulle funzioni
- ⚙ Integrali oscillanti
- ⚙ f può essere vista come operatore L_f



Ma fisicamente ?

- ❓ Esiste un processo fisico equivalente alla quantizzazione/de-quantizzazione ?

Ma fisicamente ?

❓ Esiste un processo fisico equivalente alla quantizzazione/de-quantizzazione ?

⬆ $j \uparrow \infty$ (grandi momenti angolari): si perde la differenza tra continuo e discreto

⬆ $N \downarrow 0$ (poche particelle) molecole $N < 1000$ comportamento $\sim$ quantistico

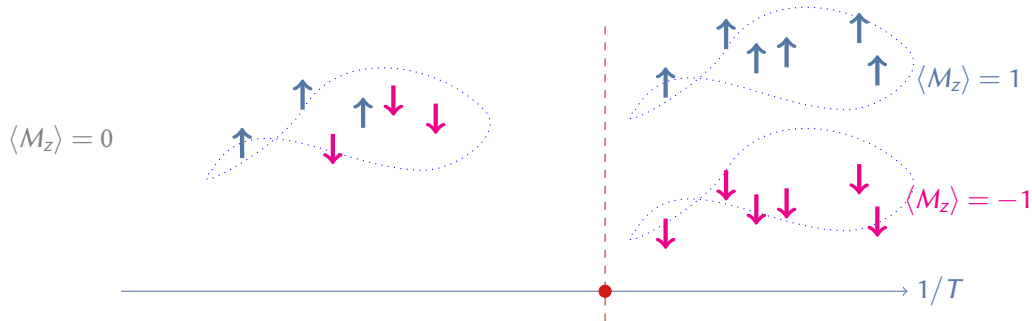
Ma fisicamente ?

- ❓ Esiste un processo fisico equivalente alla quantizzazione/de-quantizzazione ?
- ⬆ $j \uparrow \infty$ (grandi momenti angolari): si perde la differenza tra continuo e discreto
- ⬆ $N \downarrow 0$ (poche particelle) molecole $N < 1000$ comportamento $\sim$ quantistico
- ⬇ In generale, $Q_j, \times \hbar$ etc sfruttano solo analogie tra teorie classiche e quantistiche

$$U(R)Q_j(f)U(R)^{-1} = Q_j(f \circ R)$$

Spazio pubblicitario (e applicazioni)

- ! Sistemi fisici con T temperatura sono descritti all'equilibrio termodinamico da *stati* (in tecnicese: funzionali lineari positivi e normalizzati)
- ! + stati $\implies$ + fasi di equilibrio e transizioni di fase



Spazio pubblicitario (e applicazioni)

(Per sistemi di spin)

! ω_Q stato di equilibrio quantistico...

Spazio pubblicitario (e applicazioni)

(Per sistemi di spin)

! ω_Q stato di equilibrio quantistico... $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_Q \circ Q_j =: \omega_{CL}$ stato di equilibrio classico

Spazio pubblicitario (e applicazioni)

(Per sistemi di spin)

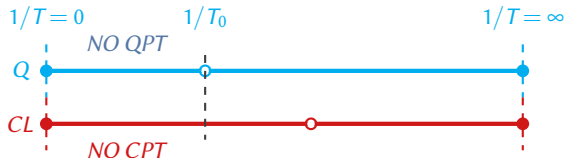
- ! ω_Q stato di equilibrio quantistico... $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_Q \circ Q_j =: \omega_{CL}$ stato di equilibrio classico
- ! Per $T \gg T_0$ se ω_{CL} è unico allora ω_Q è unico



Spazio pubblicitario (e applicazioni)

(Per sistemi di spin)

- ! ω_Q stato di equilibrio quantistico... $\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_Q \circ Q_j =: \omega_{CL}$ stato di equilibrio classico
- ! Per $T \gg T_0$ se ω_{CL} è unico allora ω_Q è unico



- ! Lo studio di sistemi classici può portare a una migliore intuizione dei fenomeni quantistici

Conclusioni

$\sim 1900 - 1930, \{, \} = i[,]/\hbar$



Motivazioni fisiche

MC nota ! MQ no

Teorie matematiche

$Q_{\hbar}, \times_{\hbar},$

geometric quantization

Limiti semiclassici

Sistemi di spin

Connessione MC e MQ

Today



1930-2000