



Non abelian Monopoles and Orientational Zero Modes

Presentazione tesi magistrale

Candidato: Lorenzo Pettinari

Relatore: Prof. Stefano Bolognesi

20, Luglio, 2023



UNIVERSITÀ
DI PISA



Indice

1 Perché li studiamo

- ▶ Perché li studiamo
- ▶ Il monopolio semiclassico
- ▶ Cosa abbiamo fatto
- ▶ Conclusioni e Prospetti futuri

Framework della tesi

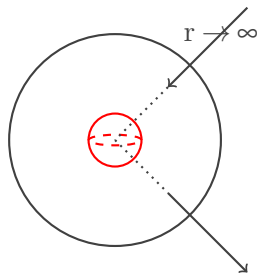
1 Perché li studiamo

Obiettivi:

- Risolvere lo scattering di una classe di bosoni su un monopolo magnetico
- Chiarire problematiche teoriche legate ai numeri quantici

Framework:

- Analisi classica in teorie di campo, con un occhio di riguardo sulle problematiche della quantizzazione



in $SU(3)$: $S[\phi_{cl} + \delta\phi, A_{cl} + w]$

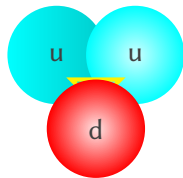
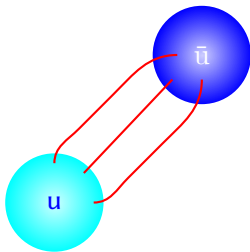
$$\phi_{cl} + \delta\phi = f(x, y, z, t)$$

$$A_{cl} + w = g(x, y, z, t)$$

Applicazioni: provare a spiegare il confinamento

1 Perché li studiamo

Il **confinamento** caratteristico della **QCD**:
Protoni come stati legati di **quark**
inseparabili



Capire il **confinamento** con i monopoli

- **condensazione** di monopoli abeliani
(**Effetto Meissner** duale)

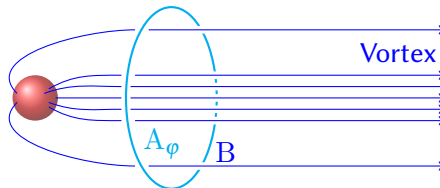
Confinamento dei monopoli

1 Perché li studiamo

Idea (**supportata dalla matematica**):

La rottura di simmetria del gruppo produce **vortici** e **monopoli**

$$G \xrightarrow{v_1} H \xrightarrow{v_2} 1$$



I vortici **terminano** su dei monopoli, causandone il **confinamento**¹

Studieremo il **monopolo a grandi distanze** → **collegamento con i vortici**



Risultati sperimentali

1 Perché li studiamo

Dirac (1981):

*”I am inclined now to believe that monopoles do not exist. So many years have gone by without any encouragement from the **experimental side**”*

La ricerca dei monopoli ha portato allo sviluppo di **nuove teorie e tecniche sperimentali**²:

- **Inflationary** universe scenario
- Predizioni verificabili delle **GUT**
- **Abbondanza** stimata dai **campi magnetici** galattici
- **Abbondanza** stimata dai **raggi cosmici**

Dirac e simmetrie

1 Perché li studiamo

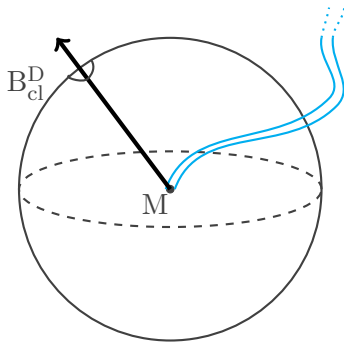
Breve storia su come una teoria che **funziona** è stata cambiata con un **artificio matematico**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \stackrel{?}{\rightarrow} \text{No monopoli}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \stackrel{!}{\rightarrow} \Phi_{\bar{C}}(\mathbf{B}) = 0$$

tubo infinitesimo i.e. **una divergenza** nel campo di gauge, controbilancia il flusso del monopolo:

$$A_{cl}^{D,a}(\mathbf{x}) = g_m \frac{\hat{n}}{r} \frac{\sin \theta}{1 - \mathbf{m}^a \cdot \mathbf{n}}, \quad B_{cl}^D(\mathbf{x}) = g_m \frac{\hat{n}}{r^2}$$



Quantizzazione della carica

1 Perché li studiamo

Eppure dei risultati **ci sono!**

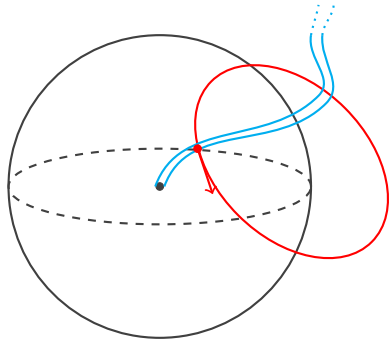
Meccanica quantistica: Una carica elettrica g_e ruota attorno al tubo (o stringa):

$$\tilde{\phi} = \phi(0) = \phi(2\pi) = \tilde{\phi} \exp \left\{ -ig_e \int_{S^1} A \right\}$$

Richiedendo che la funzione sia **single valued** $\rightarrow$ **quantizzazione**:

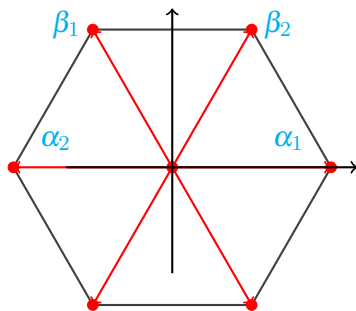
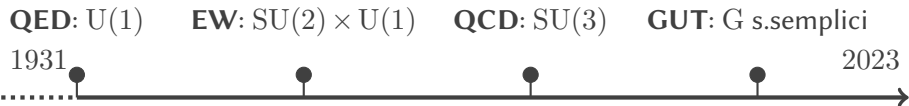
$$g_e g_m = 2\pi n$$

$$g_e^1 g_m^2 - g_e^2 g_m^1 = 2\pi n \quad (\text{Dioni})$$



Fenomenologia moderna

1 Perché li studiamo



- $g_m = \frac{4\pi}{e} \sum_{\alpha} \frac{\alpha}{(\alpha \cdot \alpha)}$ (valori su reticolo)
- $G \rightarrow H$ (rottura di simmetria)
- Monopoli e anti-monopoli
- SUSY + Confinamento



Indice

2 Il monopolio semiclassico

- ▶ Perché li studiamo
- ▶ Il monopolio semiclassico
- ▶ Cosa abbiamo fatto
- ▶ Conclusioni e Prospetti futuri

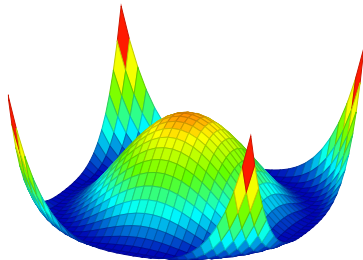
Gruppi e regolarizzazioni

2 Il monopolio semiclassico

Introduciamo un'azione:

$$S[A, \phi] = \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D\phi)_\mu^\dagger (D\phi)^\mu \right] - V(\phi)$$

- **Campo di Higgs:** $\phi = \phi^a T^a$
- **Derivata covariante:** $(D\phi)_\mu = \partial_\mu \phi - ig_e [A_\mu, \phi]$
- **Campo di forza:** $F_{\mu\nu} = \frac{i}{g_e} [D_\mu, D_\nu]$
- **Potenziale tipico:** $V(\phi)$
 - $V(\phi) = V(\text{Tr}[\phi^\dagger \phi])$
 - $V(v^2) = 0$ e **minimo**
 - $V(\infty) = +\infty$



Monopolo di 't Hooft-Polyakov: energia finita

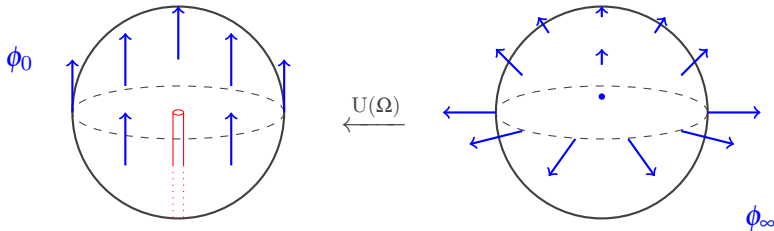
2 Il monopolo semiclassico

- Soluzione **statica banale**: $A = 0$, $\phi \equiv \phi_0 = e^{i\alpha} v$
- Soluzione **statica interessante**:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = \mathbf{U}(\Omega) \phi_0 \mathbf{U}^{-1}(\Omega) \equiv \phi_\infty$$

$$\text{A t.c. } \lim_{|x| \rightarrow \infty} (D\phi)_\mu = 0$$

$\mathbf{U}(\Omega)$ trasformazione di gauge **singolare**: **pettina** le soluzioni



Gauge singolare (Dirac)

Gauge regolare

Monopolo abeliano: $SU(2)$

2 Il monopolo semiclassico

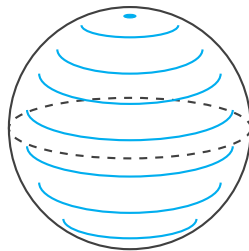
Se $\phi_0 \neq 0$, il gruppo è **rotto**:

$$SU(2) \xrightarrow{\phi_0} U(1)$$

Abbiamo una **mappa**:

$$\phi : S^2 \longrightarrow SU(2)/U(1)$$

$$\Omega \longrightarrow \phi_\infty(\Omega)$$



Le soluzioni sono classificate da $\Pi_2(SU(2)/U(1)) \simeq \mathbb{Z}$:
quante volte la soluzione si avvolge sulla sfera

Monopoli non abeliani: caratteristiche

2 Il monopolo semiclassico

- $\phi(x) \longrightarrow \phi_0 = h \cdot T$, con $T \in$ Algebra di Lie: $\text{Lie}(G)$
- $G \xrightarrow{\phi_0} H = K \times U(1)^{n-r} / Z$

Comportamento **asintotico** determinato da $E < \infty$ e B di monopolo

$$\phi \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} = h \cdot T - \frac{\mathbb{G}}{r} \in \text{Lie}(G) \quad (\text{fase di Coulomb})$$

$$B \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} = \frac{\hat{n}}{r^2} \mathbb{G} \in \text{Lie}(G)$$

$\mathbb{G} = g \cdot T$ carica magnetica generalizzata, $g = \sum_{\alpha \cdot h \neq 0} n_{\alpha} \alpha^*$

α radice: vettore su **reticolo**



Il limite BPS

2 Il monopolio semiclassico

Un **limite** importante:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} V(\phi, \lambda, v) = 0,$$

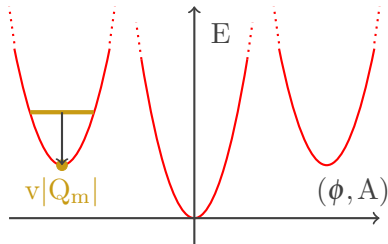
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty} \text{Tr}[\phi^+ \phi] = v^2$$

In questo caso **l'energia è un minimo assoluto**:

$$E = 2 \left| \int d^2 S^a \text{Tr}\{B^a \phi\} \right| = v |Q_m|$$

Risolviendo una equazione di
primo grado:

$$(D\phi)_i = B_i$$



Il limite BPS: Soluzioni

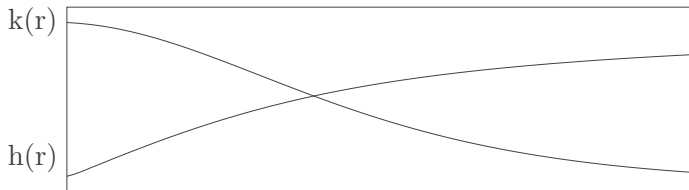
2 Il monopolio semiclassico

SU(2) : Ansatz: Simmetria sferica + $Q_m/2\pi = 1$ + Parità + Condizioni al contorno

$$\phi(x) = n^a t^a h(r), \quad A(x)_i = t^a \epsilon_{aji} n^j \frac{1 - k(r)}{g_e r}$$

Inserendo in $(D\phi)_i = B_i$ e risolvendo:

$$h(r) = v \coth v g_e r - \frac{g_e}{r}, \quad k(r) = \frac{v g_e r}{\sinh v g_e r}$$



Monopoli non abeliani: soluzioni (alcune)

2 Il monopolo semiclassico

$$G \text{ semisemplice} = \bigotimes_{\alpha} \text{SU}(2)_{\alpha}$$

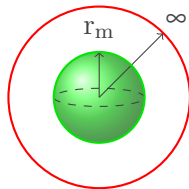
Nel limite **BPS**: soluzioni di $\text{SU}(2)_{\alpha} \hookrightarrow G$ inserite (*embeddate*) nel gruppo più grande

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^3 \phi_{\lambda}^a t^a + v \left(h - \frac{h \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} \alpha \right) \cdot H$$

$$A(x) = \sum_{a=1}^3 A_{\lambda}^a t^a$$

Caratteristiche:

- $\lambda = v h \cdot \alpha$
- $r_m \sim 1/g_e v$.
- $m_{\alpha} = v h \cdot \frac{\alpha}{(\alpha \cdot \alpha)}$



Prima scelta di gauge

Ammettiamo $F_{0i} = E_i \neq 0$, $A_0 \neq 0$ ma $(D\phi)_0 = 0$:

$$E = \int d^3x \text{Tr}[(\cos \mu E_i - (D\phi)_i)^2 + (\sin \mu B_i - (D\phi)_i)]$$

$$+ Q_m \sin \mu + Q_e \cos \mu \geq |Q_m| \sin \tilde{\mu} + |Q_e| \cos \tilde{\mu}$$

Equazioni e soluzioni per **minimizzare l'energia**: $E = M = \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}$

$$(D\phi)_i = \cos \tilde{\mu} E_i,$$

$$g_e \rightarrow g_e \cos \tilde{\mu}$$

$$(D\phi)_i = \sin \tilde{\mu} B_i,$$

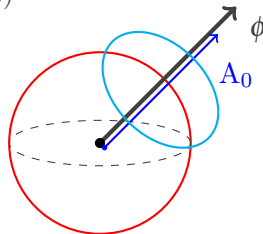
$$A_0(x) = \sin \tilde{\mu} \phi(x)$$

Seconda scelta di gauge

Ruotiamo il monopolo con

$$U(t, \mathbf{x}) = \exp(-ig_e A_0(\mathbf{x})t)$$

- $\phi \rightarrow e^{-i\phi g_e \sin \tilde{\mu} t} \phi e^{i\phi g_e \sin \tilde{\mu} t} = \phi$
- $A_0 \rightarrow A_0 - i/g_e \partial_0 U U^{-1} = 0$
- $B_i(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-ig_e A_0 t} B_i(\mathbf{x}) e^{ig_e A_0 t}$



Abbiamo **eccitato** un modo $U(1)$, la cui **carica di Noether** è Q_e

Degenerazioni e modi zero

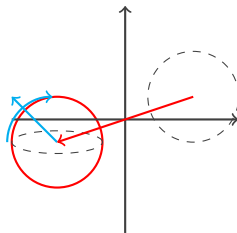
2 Il monopolo semiclassico

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x, \mathbf{p})$$

$$A(x) \rightarrow A(x, \mathbf{p})$$

$\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ Moduli space: $\delta \mathbf{p} \rightarrow \delta E = 0$

- Solitamente associati alle simmetrie **globali**
- E.g. per un monopolo fondamentale, **tre traslazioni e una rotazione**



$E \sim 0 \rightarrow p(t) \in \mathcal{M}$: Il **moto del monopolo** è descritto dal **moto nel moduli space**:

modi zero (modi che non cambiano l'energia)



Indice

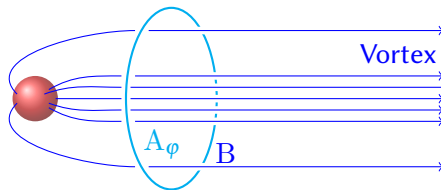
3 Cosa abbiamo fatto

- ▶ Perché li studiamo
- ▶ Il monopolio semiclassico
- ▶ **Cosa abbiamo fatto**
- ▶ Conclusioni e Prospetti futuri

Cosa abbiamo fatto?

3 Cosa abbiamo fatto

1. Studiato una classe di **modi zero** che **ruota** le soluzioni $SU(2)$ all'interno del gruppo G , interpretandoli come **fluttuazioni statiche** attorno a ϕ_{cl}
2. Studiato la stessa classe, interpretando i modi zero come **stati di scattering** entranti e uscenti dal monopolo



Vortici hanno gli stessi **modi zero**: importante studiarli per i **monopoli** ³

Degenerazione dovuta all'orientazione

3 Cosa abbiamo fatto

$G \xrightarrow{\phi_0} H$: Possiamo *ruotare* l'embedding del gruppo $SU(2) \subset G$ con $S \in H$

$$SU(2)_{\beta_1} \hookrightarrow G : \begin{bmatrix} & & \\ & * & * \\ & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow StS^{-1}} SU(2)_{\beta_2} \hookrightarrow G \begin{bmatrix} & & \\ & * & * \\ & * & * \end{bmatrix}$$

$S \in H/H_0$: Trasformazioni in H che **non** lasciano invariata la soluzione di monopolo

$$\mathcal{M} \supseteq \mathbb{R}^3 \times U(1) \times M : \quad \text{Moduli space } n=1$$

In M vivono i parametri che *ruotano* l'embedding

Degenerazione dovuta all'orientazione

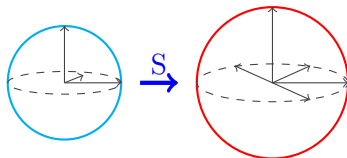
3 Cosa abbiamo fatto

Accendiamo le **fluttuazioni (modi zero)** legate alla trasformazione S

$$SU(3) : S(t, x) \in \begin{bmatrix} & * \\ * & \end{bmatrix} = \exp\{c(t, x)E_{\alpha_1} - c^*(t, x)E_{-\alpha_1}\}$$

- Generalizzazione **non abeliana** del modo $U(1)$ generata da $E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}$:

$$M = SU(2)/U(1) \sim S^2 \sim \mathbb{CP}^1$$



Modi zero in (1+0)

3 Cosa abbiamo fatto

Fluttuazioni **infinitesime**, **statiche** generate da una **trasformazione di gauge globale**

$$S = e^{i\Omega(x)} \in 1 + i\Omega(x) + O(\Omega(x))$$

$$\delta\phi = i[\Omega, \phi],$$

$$\delta A = i[\Omega, A] + d\Omega$$

Richiediamo:

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Omega(x) = \text{cost.}$
- $\Omega \in \text{Span}(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1})$

Espandendo a **grandi distanze** attorno alla soluzione classica:

$$\phi_{\text{cl}} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} T^8 - \frac{t^3(\beta_1)}{r}$$

$$A_{\text{cl}} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} nt^3(\beta_1) A_{\text{cl}}^D$$

$$D^2\Omega + [\phi_{\text{cl}}, [\phi_{\text{cl}}, \Omega]] = 0$$

Modi zero in (1+0)

3 Cosa abbiamo fatto

Operatore **momento angolare generalizzato** ed **equazione** per $r \rightarrow \infty$

$$L = -i(x \wedge D) - n[t^3(\beta_1), \cdot] \quad \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{L^2}{r^2} \right] \Omega(r, \theta, \varphi)$$

Espandiamo Ω con: $L^2 Y_{qlm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{qlm}$, $L_z Y_{qlm} = m Y_{qlm}$,

$$q = -n/2$$

n : carica del monopolio $SU(2)$

$$l \in \{|q|, |q| + 1, \dots\}$$

$$m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l+1\}$$

Problemi dei modi zero in (1+0)

3 Cosa abbiamo fatto

Fattorizzando le componenti radiali e angolari $\Omega = \xi(r) Y_{qlm}(\theta, \varphi)$:

$$[\partial_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}] \xi(r) = 0$$

Cercando $\xi(r) = r^\alpha$: $\alpha(\alpha+1) = l(l+1) \longrightarrow \xi(r) \propto \sqrt{r}$

$$D_i \Omega = \delta a_i \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \implies S \sim \int_R^\infty dr^2 \delta a_i M^2(r)_{ij} \delta a_j = \int_R^\infty dr \frac{1}{r} = \infty$$

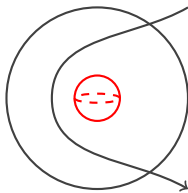
- Soluzioni **non normalizzabili** e non **quantizzabili**
- Non sono **vere** trasformazioni di gauge globali

Scattering in (1+1)

3 Cosa abbiamo fatto

Idea: modi zero **bosonici** in $E_{\pm\alpha_1}$ **propaganti**:

$$\text{SU}(3) : \begin{bmatrix} v & w \\ w^* & v - \frac{1}{r} \\ -2v + \frac{1}{r} \end{bmatrix} \longleftarrow \phi_0 \text{ non induce massa, ma la sua coda } 1/r \text{ si}$$



Linearizzando e Abelianizzando:

$$L : A = A_{cl} + wE_{\alpha_1} \quad \phi = \phi_{cl}$$

$$A : [E_{\alpha_1}, A_{cl}] = qA_{cl}^D E_{\alpha_1} \quad [E_{\alpha_1}, \phi_{cl}] = -E_{\alpha_1} \frac{q}{r}$$

Scattering in (1+1): equazioni

3 Cosa abbiamo fatto

forma **vettoriale** e coordinate **sferiche**:

$$D^2 w + \frac{q^2}{r^2} w + 2i(w \wedge B_{cl}^D) \implies \begin{cases} D^2 w_\theta + \frac{q^2}{r^2} w_\theta + \frac{2iq}{r^2} w_\varphi \\ D^2 w_\varphi + \frac{q^2}{r^2} w_\varphi - \frac{2iq}{r^2} w_\theta \\ D^2 w_r + \frac{q^2}{r^2} w_r = 0 \end{cases}$$

Cinetico : **Massivo** : **background**

Background gauge condition:

$$D \cdot w = 0 \implies w \text{ **non** trasformazione di gauge locale}$$



Soluzioni massive

3 Cosa abbiamo fatto

- Momento angolare **totale**: $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$
- **Autovettori** di J^2 , L^2 , J_z : $Y_{jlj_z}^{(q)}$
- Soluzioni divise in **tre classi**:

$$\mathbf{L} = -i(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{D}) + \frac{\mathbf{n}}{r}q$$

$$\mathbf{S}^k = -i\epsilon_{ijk}$$

$$w_{jj_z} = f(r, t)Y_{jj-1j_z}^{(q)} + g(r, t)Y_{jjj_z}^{(q)} + h(r, t)Y_{jj+1j_z}^{(q)}$$

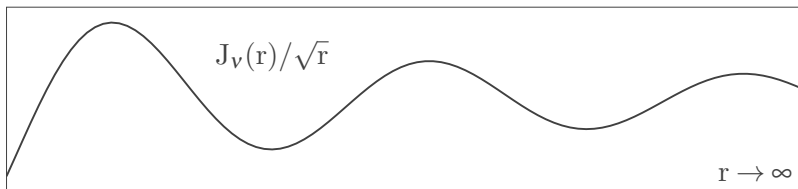
- **Type A**: $f, g, h \neq 0$ e $j \geq |q| + 1 \geq 3/2$ $l = j, j \pm 1$
- **Type B**: $f = 0$ e $j = |q| \geq 1/2$ $l = j, j + 1$
- **Type C**: $f, g = 0$ e $j = |q| - 1 \geq 0$ $l = j + 1$

Soluzioni massive

3 Cosa abbiamo fatto

Fattore radiale della forma:

$$f_{\nu}(r, t) \propto \frac{e^{-iEt}}{\sqrt{r}} J_{\nu}(Er) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-iEt}}{r} \cos\left(Er - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \nu = \nu(j, q)$$



Scattering non massivo in (1+1)

3 Cosa abbiamo fatto

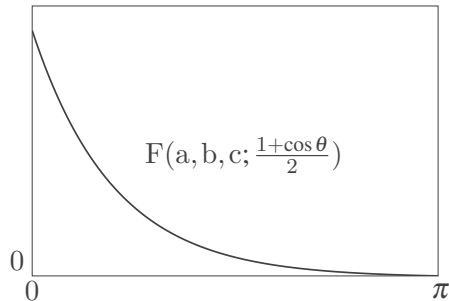
Soluzioni **senza termine repulsivo** (zero modo di scattering):

$$\frac{1}{r^2} [L^2 + q^2 - 2(S \cdot B_{cl}^D)] w \equiv M(r)w = 0$$

forma funzionale:

$$\Theta(\theta, \varphi) = e^{-i\frac{m+q}{2}\varphi} g(\theta) F(a, b, c; \frac{1+\cos\theta}{2})$$

$$m, q \in \mathbb{Z}/2, |m| \leq |q|$$

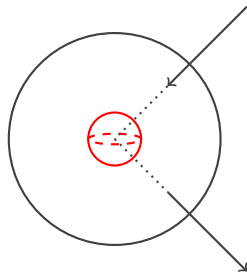


Numeri quantici

3 Cosa abbiamo fatto

Definendo:

- q carica di w
- $n \cdot S$ elicità di w
- $e^{-iE(t \pm r)}$ direzione del moto



q (Carica)	h (Elicità)	Direzione del moto
+	-	In
+	+	Out
-	+	In
-	-	Out

Callan-Rubakov

3 Cosa abbiamo fatto

Soluzioni **ben definite** per $r \rightarrow \infty \dots$ Comportamento **ignoto** per $r \leq r_m$



Condizioni al contorno $r_m \sim 0$ + **unitarietà**

$$w(0, t, \theta, \varphi)_{>0, -}^{\text{In}} = e^{i\varepsilon} w(0, t, \theta, \varphi)_{>0, +}^{\text{Out}},$$

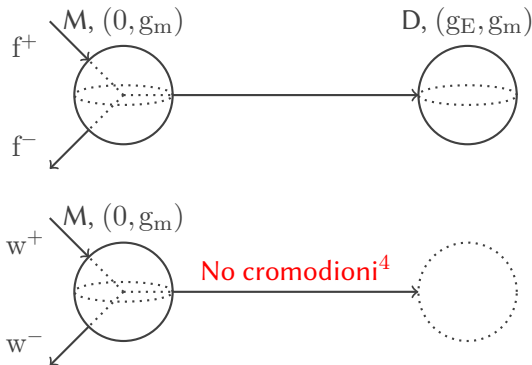
$$w(0, t, \theta, \varphi)_{>0, -}^{\text{In}} = e^{i\varepsilon} w(0, t, \theta, \varphi)_{<0, -}^{\text{Out}},$$

O **la carica** o **l'elicità** non sono conservate

U(1) v.s. SU(N)

3 Cosa abbiamo fatto

Problema analogo **fermioni su monopolo** U(1): **risolto!**



Due problematiche aggiuntive: **quantizzazione** e **non linearità** delle equazioni

Modello $\mathbb{CP}^1$

3 Cosa abbiamo fatto

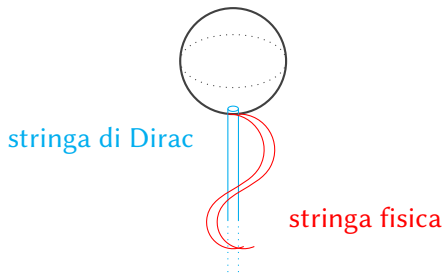
Obiettivo: parametrizzare la soluzione **non lineare** come un **modo** $\mathbb{CP}^1$

$$\phi \rightarrow U(\mathbf{m}(\mathbf{r}, t))\phi U^{-1}(\mathbf{m}(\mathbf{r}, t))$$

$$A_{\theta, \varphi} \rightarrow U(\mathbf{m}(\mathbf{r}, t))A_{\theta, \varphi}U^{-1}(\mathbf{m}(\mathbf{r}, t))$$

$$A_{0, r} \rightarrow -i\partial_{0, r}UU^{-1}(\mathbf{m}(\mathbf{r}, t))\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$$

$$S^{(1+1)}[\mathbf{m}] = \beta \int d^2x \partial_n \mathbf{m}^a \partial^n \mathbf{m}^a$$



Fluttuazioni **fisiche** della stringa $\rightarrow$ soluzioni **non normalizzabili**

Ansatz più generale?

L'ostruzione topologica

3 Cosa abbiamo fatto

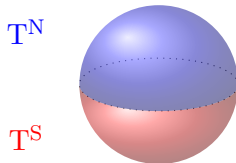
Una **causa** di tutti i problemi:
Generatori di gauge $\rightarrow$ **sezioni**

$$T_i^N(x), T_i^S(x) \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Devono **coincidere** in $N \cap S$:

$$S_{SN}(\varphi) = [0] \in \Pi_1(H)$$

$$SU(3) : S_{SN}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi/2} \end{bmatrix} \not\sim [0]$$



Non si può definire un **gruppo di colore globale** in presenza di un monopolio⁵



Indice

4 Conclusioni e Prospetti futuri

- ▶ Perché li studiamo
- ▶ Il monopolio semiclassico
- ▶ Cosa abbiamo fatto
- ▶ Conclusioni e Prospetti futuri



Riassunto di quanto fatto

4 Conclusioni e Prospetti futuri

Meriti della tesi:

- Review dei monopoli non abeliani nel limite classico
- Analisi della degenerazione per orientazione
- Trovato spettro completo delle fluttuazioni di scattering associate a questo zero modo e studio dei loro numeri quantici
- Affrontato problematiche relative all'esistenza dei cromodioni

Da affrontare in futuro:

- Regime quantistico e inclusione di supersimmetria: $\mathcal{N} = 2, \mathcal{N} = 4$
- Verificare il collegamento con le soluzioni dei vortici a grande distanza



Non abelian Monopoles and Orientational Zero Modes

Grazie per l'attenzione!
Ci sono domande?